PART2 積・商の極形式

要点整理と公式

要点 ① 複素数の積・商の極形式

0 でない 2 つの複素数 z_1, z_2 が極形式でそれぞれ

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

と表されるとき，積 z_1z_2 の極形式は，三角関数の加法定理を用いると，次のようになる。

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)\\
&= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\}\\
&= \qquad \{\cos(\qquad\quad) + i\sin(\qquad\quad)\}
\end{aligned}$$

よって，積 z_1z_2 の絶対値は r_1r_2，つまり z_1 と z_2 の絶対値の積であり，偏角は $\theta_1+\theta_2$，つまり z_1 と z_2 の偏角の　　である。

複素数の積の極形式

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ のとき

$$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|,\qquad \arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

同様に，商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ の極形式は，次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}\\
&= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}\\
&= \frac{r_1\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\}}{r_2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)}\\
&= \qquad \{\cos(\qquad\quad) + i\sin(\qquad\quad)\}
\end{aligned}$$

よって，商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ の絶対値は $\dfrac{r_1}{r_2}$，つまり z_1 と z_2 の絶対値の商であり，偏角は $\theta_1-\theta_2$，つまり z_1 と z_2 の偏角の　　である。

複素数の商の極形式

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$$

(ex) $z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$，$z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき

$$z_1z_2=\qquad\left\{\cos\left(\qquad\right)+i\sin\left(\qquad\right)\right\}$$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\qquad\left\{\cos\left(\qquad\right)+i\sin\left(\qquad\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$$

2 次の 2 つの複素数 α，β について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $\alpha = 1 - \sqrt{3}\,i$，$\beta = \sqrt{3} + i$　　(2) $\alpha = -2 + 2i$，$\beta = -\sqrt{3} - 3i$

Point Pickup

複素数の積・商の極形式

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ のとき

積　$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$，　$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

商　$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$，　$\arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

第 6 講 PART2 確認問題

$\alpha=-\sqrt{3}+i$，$\beta=1+\sqrt{3}\,i$ のとき，次の式を極形式で表せ。

ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $\alpha\beta=$ ア

① $4(\cos\pi+i\sin\pi)$　② $4\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$

③ $2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$　④ $4\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$

2 $\frac{\alpha}{\beta}=$ イ

① $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$　② $\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

③ $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$　④ $\cos\pi+i\sin\pi$

$\alpha=-1-i$，$\beta=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ のとき，次の式を極形式で表せ。

ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

答えは下の①～④のうちから選べ。

3 $\alpha\beta=$ ウ

① $\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi$

② $\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$

③ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)$

④ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$

4 $\dfrac{\alpha}{\beta}=$ [エ]

① $\cos\dfrac{13}{12}\pi+i\sin\dfrac{13}{12}\pi$

② $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11}{12}\pi+i\sin\dfrac{11}{12}\pi\right)$

③ $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{13}{12}\pi+i\sin\dfrac{13}{12}\pi\right)$

④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{13}{12}\pi+i\sin\dfrac{13}{12}\pi\right)$

[MEMO]

PART2 積・商の極形式

2 次の 2 つの複素数 α，β について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $\alpha = 1-\sqrt{3}\,i$，$\beta = \sqrt{3}+i$　　(2) $\alpha = -2+2i$，$\beta = -\sqrt{3}-3i$

[解答]

(1) $\alpha = 1-\sqrt{3}\,i = 2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi + i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$

$\beta = \sqrt{3}+i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって

$\alpha\beta = 2\cdot 2\left\{\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\} = 4\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi + i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{2}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\} = \cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

(2) $\alpha = -2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

$\beta = -\sqrt{3}-3i = 2\sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi + i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

よって

$\alpha\beta = 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}\left\{\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{4}{3}\pi\right)\right\} = 4\sqrt{6}\left(\cos\dfrac{25}{12}\pi + i\sin\dfrac{25}{12}\pi\right)$

$= 4\sqrt{6}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left\{\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{4}{3}\pi\right)\right\} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\left\{\cos\left(-\dfrac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{7}{12}\pi\right)\right\}$

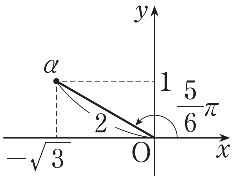
$= \dfrac{\sqrt{6}}{3}\left(\cos\dfrac{17}{12}\pi + i\sin\dfrac{17}{12}\pi\right)$

第 6 講 PART2 確認問題 解答

1 [正解] ア：④

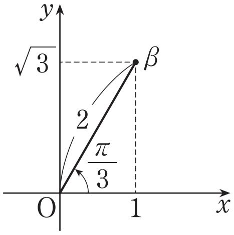
[解説]

$$\alpha=-\sqrt{3}+i$$
$$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$ [A]



[A] α, β をそれぞれ極形式で表す。

$$\beta=1+\sqrt{3}\,i$$
$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$



よって,

$$\alpha\beta=2\cdot2\left\{\cos\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$ [B]

$$=4\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$

[B] 複素数の積の極形式
$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,
$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とすると,
z_1z_2
$=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

2 [正解] イ：①

[解説]

$$\alpha=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$
$$\beta=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

よって,

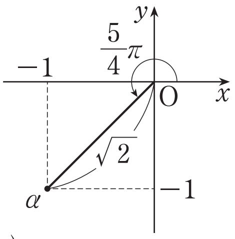
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{2}\left\{\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$ [C]

$$=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

[C] 複素数の商の極形式
$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,
$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とすると,
$\frac{z_1}{z_2}$
$=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

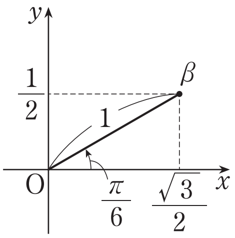
3 [正解] ウ：④

[解説]



$$\alpha=-1-i$$
$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$ [D]

[D]　α, β をそれぞれ極形式で表す。



$$\beta=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$
$$=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

よって，

$$\alpha\beta=\sqrt{2}\cdot1\left\{\cos\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$ [E]

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$$

[E]　複素数の積の極形式
$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,
$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とすると，
z_1z_2
$=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

4 [正解] エ：③

[解説]

$$\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$\beta=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

よって，

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{2}}{1}\left\{\cos\left(\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$ [F]
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)$$

[F]　複素数の商の極形式
$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,
$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とすると，
$\frac{z_1}{z_2}$
$=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$